ニムと同一の Sprague-Grundy 関数を持つ take-away ゲーム

東北大学 数理科学連携研究センター　入江 佑樹
Yuki Irie
Research Alliance Center for Mathematical Sciences,
Tohoku University

不偏ゲームを Sprague-Grundy 関数によって分類する試みの一つを紹介する. 具体的には, Sprague-Grundy 関数が成分の混合 β 進法でのニム和となるゲームを構成し, そのようなゲームの中で極小となるものの特徴付けと, 最大となるものの再帰的構成を与える.

1　序論

本稿では (組合せ短) 不偏ゲームと呼ばれるゲームを扱う. 次節で述べるように、不偏ゲームはある有限性の条件を満たす有向グラフとみなせる. ゲームでまず問題になることはどのようにしたら勝てるかである. 1902 年に Bouton[3] がニムというゲームの必勝法を与えたことが, 組合せゲーム理論のはじまりといわれている. その後, Sprague[13] と Grundy[7] によって Sprague-Grundy 関数が独立に発見され, 一般の不偏ゲームを解析できるようになった. これ以降, 様々なゲームの Sprague-Grundy 関数が研究されてきた. ここで Sprague-Grundy 関数の定義は再帰的なため, 原理的には値を求めることができるが, 組合せ爆発が起こり, 現実的には求められないことが多い.

最近になって, ある種のゲームと対称群の表現の間にはつながりがあることが分かってきた [8]. さらにそこで得られた, ゲームを構成する飽和という概念を用いると, 多くの飽和ゲームの Sprague-Grundy 関数は明示的に書き下せる上に, それらは共通したある性質を持つことも分かっている.

それでは逆にそのような性質を持つ関数全体の中で, ゲームの Sprague-Grundy 関数

として実現できるものを特徴付けられるだろうか？さらにゲームの Sprague-Grundy 関数として実現できる場合は, そのようなゲーム全体を捕まえられるだろうか？これらが本稿の根底にある問であり, ゲームを Spague-Grundy 関数によって分類することを目指している.

本稿の目的は上の問に対する部分的な答えとして, 混合 β 進法のニム和で表される関数 σ^β についての結果を紹介することである. 以下, 2 節にて不偏ゲーム理論の概説を行い, 3 節にて Sprague-Grundy 関数がニムと同じゲーム, すなわち 2 進法の σ^2 の場合の結果を述べる. そして最後の 4 節にて, 一般の σ^β の場合の結果を紹介する. 具体的には σ^β がゲームの Sprague-Grundy として実現できる, すなわち Sprague-Grundy 関数が σ^β となるゲームが存在することを示した後, そのようなゲーム全体の中で極小となるものの特徴付けを与え, また最大となるものの再帰的構成を与える.

2　不偏ゲーム

本節では不偏ゲーム理論を概説する. 最も基本的なゲームであるニムを紹介した後, 本稿で扱う石とりゲーム (take-away ゲーム) を定義する. その後 Sprague-Grundy 関数を定義し, この関数を使って必勝法を与えた後, ニムの Sprague-Grundy 関数の明示公式を紹介する. なお不偏ゲームを含む, 組合せゲームの本としては, 例えば [1, 4] がある.

2.1　ニム

まず, 最も基本的なゲームといえるニムから話をはじめよう. 本稿で扱うゲームは全て二人対戦のゲームである. ニムは石の山を使ったゲームであり, 二人のプレイヤーは交互に一つの山を選び, 選んだ山から 1 個以上の石をとる. 交互に石をとっていき, 最後の 1 個をとった方が勝ちである.

例えば三山の場合で左から 1, 3, 2 個の石がある場合を考えよう (図 1). 先手が中央から 2 個とったとする. 対する後手は右から 2 個とる. こうなると先手は打つ手がなく, どちらの山から石をとっても, 後手に最後の 1 個をとられてしまう.

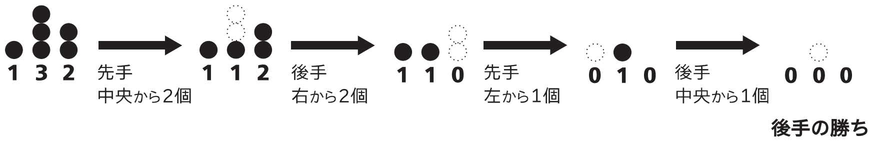

図 1　ニムの対戦例.

2.2　定義

図 1 が示すように, ゲームは局面を頂点集合として, 移動できるときに辺で結ぶことで有向グラフと見なせる. ここで, 一般の不偏ゲームを有向グラフとして定義しておこう. Γ を頂点集合 $\mathcal{P}$, 辺集合 $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}^2$ からなる有向グラフ $(\mathcal{P}, \mathcal{E})$ としよう. このとき Γ が **(短) 不偏ゲーム** であることを各頂点 $X \in \mathcal{P}$ からはじまる最長パスの長さが有限であることで定義する. 例えば, 図 2 の左は不偏ゲームであるが, 右は不偏ゲームではない. 本稿では不偏ゲームを単にゲームと呼ぶ.

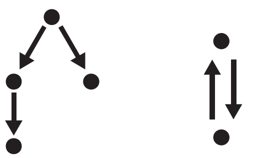

図 2　不偏ゲームと不偏ゲームでない例.

ゲーム Γ の遊び方を述べる. ゲーム前にまず局面 X を一つ選ぶ. 先手は X から X の **オプション** Y, すなわち $(X, Y) \in \mathcal{E}$ となる局面 Y に移動する. 次に後手は Y から Y のオプション Z に移動する. このように交互にオプションへ移動し, **終局面** (オプションのない局面) に到着した方が勝ちである. 例えば図 2 の左側のゲームで, 一番上の頂点からはじめた場合を考えよう. 先手は左と右の 2 つの選択肢がある. ここでうっかり左に行ってしまうと, 対する後手が終局面に移動でき, 後手に負けてしまう. 右に行けば, この局面は終局面のため, 先手の勝ちである.

2.3 石とりゲーム

本稿で扱う石とりゲームを定義しよう．$\mathbb{N}$ を非負整数全体 $\{0,1,2,\dots\}$ とする．正数 m を固定し，$\mathcal{P}$ を $\mathbb{N}^m$ の部分集合とする (本稿で主に考えるのは $\mathcal{P}$ が $\mathbb{N}^m$ の場合である)．$\Omega = \{0,1,\dots,m-1\}$ として，$\mathscr{T}$ を $\mathbb{Z}^m$ の元で成分の和が正のもの全体とする．すなわち

$$\mathscr{T} = \left\{ T \in \mathbb{Z}^m : \sum_{i\in\Omega} t^i > 0 \right\}.$$

ただし t^i は T の第 i 成分を表す (以下でも同様に $\mathbb{Z}^m$ の元を大文字で表し，その成分を小文字で表す)．$\mathscr{C}$ を $\mathscr{T}$ の部分集合とする．このとき，**石とりゲーム** [*1] $\Gamma(\mathcal{P},\mathscr{C})$ を局面集合が $\mathcal{P}$ で辺集合が

$$\{ (X,Y) \in \mathcal{P}^2 : X - Y \in \mathscr{C} \}$$

のゲームと定義する．

例 2.1 (ニム)**.** $\mathcal{P} = \mathbb{N}^m$ とし，

$$\mathscr{C}_{[1]} = \{ C \in \mathbb{N}^m : \mathrm{wt}(C) = 1 \}$$

としよう． ここで $\mathrm{wt}(C)$ は C の Hamming 重み，すなわち非負成分の個数 $\#\{ i \in \Omega : c^i \neq 0 \}$ を表す．石とりゲーム $\Gamma(\mathcal{P},\mathscr{C}_{[1]})$ が（m 山の）ニムである．

例 2.2 (マヤ)**.** $\mathcal{P}$ を $\mathbb{N}^m$ の元で全ての成分が異なるもの全体としよう．すなわち，

$$\mathcal{P} = \{ X \in \mathbb{N}^m : x^i \neq x^j \ (0 \leqslant i < j \leqslant m-1) \}.$$

石とりゲーム $\Gamma(\mathcal{P},\mathscr{C}_{[1]})$ を**マヤ** (あるいは **Welter ゲーム**, **Sato-Welter ゲーム**) と呼ぶ．マヤは Welter[14] と佐藤 [12, 10, 11] により解析がされた．なお，このゲームが序論で述べた対称群の表現と関係するゲームである．

2.4 Sprague-Grundy 関数

ゲームを解析する主な道具である Sprague-Grundy 関数を与える．Γ をゲーム $(\mathcal{P},\mathcal{E})$ とし，X をその局面とする．X の **Sprague-Grundy 数** $\mathrm{sg}(X)$ を X のオプションの

*1 $\mathscr{C}$ の元には成分が負のものも許しているため，正確には石をとったりおいたりするゲームである．

Sprague-Grundy 数に現れない最小の非負整数と定義する．すなわち

$$\mathrm{sg}(X) = \mathrm{sg}_\Gamma(X) = \mathrm{mex}\,\{\,\mathrm{sg}_\Gamma(Y) : Y \text{ は } X \text{ のオプション}\,\}.$$

ただし, $\mathrm{mex}\,S$ は S に入らない最小の非負整数 $\min\{\,n \in \mathbb{N} : n \notin S\,\}$ を表す．X が終局面のとき, X はオプションを持たないため, $\mathrm{sg}(X) = \mathrm{mex}\,\varnothing = 0$ となることに注意しよう．非負整数値関数 $\mathrm{sg} : \mathcal{P} \ni X \mapsto \mathrm{sg}(X) \in \mathbb{N}$ をゲーム Γ の **Sprague-Grundy 関数** と呼ぶ.

例 2.3. 2 山ニムのいくつかの局面に対して, Sprague-Grundy 数を求めよう．まず $(0,0)$ は終局面のため, Sprague-Grundy 数は 0 である．次に $(0,1)$ はオプションに $(0,0)$ を持つため

$$\mathrm{sg}((0,1)) = \mathrm{mex}\,\{\,\mathrm{sg}((0,0))\,\} = \mathrm{mex}\,\{\,0\,\} = 1.$$

同様に $\mathrm{sg}((1,0)) = 1$ である．また

$$\mathrm{sg}((0,2)) = \mathrm{mex}\,\{\,\mathrm{sg}((0,0)), \mathrm{sg}((0,1))\,\} = \mathrm{mex}\,\{\,0,1\,\} = 2$$

である．次に局面 $(1,1)$ を考えよう．この局面のオプションは $(0,1)$ と $(1,0)$ のため

$$\mathrm{sg}((1,1)) = \mathrm{mex}\,\{\,\mathrm{sg}((0,1)), \mathrm{sg}((1,0))\,\} = \mathrm{mex}\,\{\,1\,\} = 0.$$

2.5　必勝法

Sprague-Grundy 関数の一つの応用として, ゲームの必勝法を与える．具体的には「Sprague-Grundy 数が 0 の局面に移動せよ」が必勝法である．この方法で実際に勝つことができることを確かめよう．Sprague-Grundy 数が 1 以上の局面 X からゲームをはじめたとしよう．このとき Sprague-Grundy 数の定義から X は Sprague-Grundy 数が 0 のオプション Y を持つ．先手は Y に移動したとしよう．局面 Y は Sprague-Grundy 数 0 のオプションを持たないため, オプションを持つとしたら, その Sprague-Grundy 数は 1 以上である．後手がそのようなオプションに移動したとしても, 先手は再び Sprague-Grundy 数 0 のものに移動できる．このように先手は Sprague-Grundy 数 0 の局面に移動し続けることができ, さらに終局面の Sprague-Grundy 数 は 0 であり, ゲームの定義から有限回の移動で終局面につくことから, この方法で先手は勝つことができる．すなわち $\mathrm{sg}(X) \geqslant 1$ となる局面 X からはじめると先手が必勝, $\mathrm{sg}(X) = 0$ の場合は後手が必勝である.

2.6 明示公式

上で見たように, Sprague-Grundy 数は終局面から再帰的に計算できるが, 局面の数が多くなれば計算量が膨大になり, 実際に求めることは困難になる. ところが一部のゲームに対しては, 明示的に計算できることが知られている. その代表例がニムである.

定理 2.4 (Sprague [13], Grundy [7])**.** X をニムの局面とする. このとき

$$\mathrm{sg}(X) = \sigma^2(X) = x^0 \oplus_2 \cdots \oplus_2 x^{m-1}.$$

ここで $\oplus_2$ は 2 進法での繰り上がりのない足し算 (ニム和と呼ばれ, 排他的論理和と同じである) を表す.

例 2.5. 再びニムの局面 $(1, 3, 2)$ を考えよう. $1, 3, 2$ は 2 進法ではそれぞれ $1, 11, 10$ である. よって $1 \oplus_2 3 = 2, 2 \oplus_2 2 = 0$ のため, この局面の Sprague-Grundy 数は 0 である. すなわち先手は, はじめから打つ手がなかったのである.

3 ニムと同一の Sprague-Grundy 関数を持つゲーム

前節で見たようにニムの Sprague-Grundy 関数は σ^2 になる. それでは逆に, Sprague-Grundy 関数が σ^2 となる石とりゲームは他にどのようなものがあるだろうか?

結果を述べるために, 言葉を用意する. $\mathcal{P}$ を $\mathbb{N}^m$ の部分集合とする. ϕ を $\mathcal{P}$ を定義域とする非負整数値関数としよう. このとき, $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{T}$ が ϕ の **Sprague-Grundy 系** であることをゲーム $\Gamma(\mathcal{P}, \mathscr{C})$ の Sprague-Grundy 関数が ϕ と等しいことで定義する. すなわち全ての局面 $X \in \mathcal{P}$ に対して

$$\mathrm{sg}_{\Gamma(\mathcal{P},\mathscr{C})}(X) = \phi(X).$$

さらに, $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{N}^m \backslash \{(0, \ldots, 0)\}$ のときは, ϕ の **正 Sprague-Grundy 系** と呼ぶ. ϕ の Sprague-Grundy 系全体を $\Delta(\phi)$ で表そう. 包含関係で極小 (極大) な Sprague-Grundy 系を単に **極小系** (**極大系**) と呼ぶ. **最小系** と **最大系** も同様に定義する.

注 3.1. $\mathscr{C}$ が関数 ϕ の Sprague-Grundy 系であることと, 次の 2 つの条件が成立することは同値である: 全ての局面 $X \in \mathcal{P}$ に対して

(SG1) $C \in \mathscr{C}$ かつ $X - C \in \mathcal{P}$ のとき, $\phi(X - C) \neq \phi(X)$.
(SG2) $0 \leqslant h < \phi(X)$ のとき, ある $C \in \mathcal{P}$ が存在し $\phi(X - C) = h$ かつ $X - C \in \mathcal{P}$.

よって $\mathscr{C}$ と $\mathscr{D}$ が ϕ の Sprague-Grundy 系ならば次が成立する.

(1) もし $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{E} \subseteq \mathscr{D}$ ならば, $\mathscr{E}$ も ϕ の Sprague-Grundy 系である.
(2) $\mathscr{C} \cup \mathscr{D}$ も ϕ の Sprague-Grundy 系である. 特に ϕ の最大系が存在する (なお, 一般には極小系は複数ある).

例 3.2. Sprague と Grundy の結果から, $\mathscr{C}_{[1]}$ は σ^2 の Sprague-Gurndy 系であり, さらに正の極小系になっている. m が 2 以上の場合 *2 は σ^2 の極小系は他にもあり, n が 2 のベキでなければ, $(0, \ldots, 0, n, 0, \ldots, 0)$ の形の元を含まない極小系が存在する. また n が 2 のベキのときは, どの Sprague-Grundy 系も $(0, \ldots, 0, n, 0, \ldots, 0)$ を含むため次が成立する.

定理 3.3. m を 2 以上とする. このとき次が成立する.

$$\bigcap_{\mathscr{C} \in \Delta(\sigma^{2,m})} \mathscr{C} = \{\, C \in \mathscr{C}_{[1]} : C \text{ のただ一つの正の成分は 2 のベキ} \,\}.$$

さて, 上で述べたように Sprague-Grundy 系同士の和も Sprague-Grundy 系である. よって, 例えば σ^2 の正の Sprague-Grundy 系で最大のものが存在し, これは Blass と Fraenkel と Guelman[2] によって決定されている. また σ^2 の最大系は次になる (これは Blass らの結果の自然な一般化になっている).

定理 3.4.

$$\max \Delta(\sigma^2) = \left\{ C \in \mathscr{T} : \operatorname{ord}_2\left(\sum_{i \in \Omega} c^i\right) = \operatorname{mord}_2(C) \right\}.$$

ただし, $\operatorname{ord}_2(n)$ は n の 2-adic order である. すなわち

$$\operatorname{ord}_2(n) = \begin{cases} \max\{\, L \in \mathbb{N} : 2^L \mid n \,\} & \text{if} \quad n \neq 0, \\ \infty & \text{if} \quad n = 0. \end{cases}$$

また $\operatorname{mord}_2(C)$ は C の成分の最小の 2-adic order である. すなわち

$$\operatorname{mord}_2(C) = \min\{\, \operatorname{ord}_2(c^i) : i \in \Omega \,\}.$$

*2 $m = 1$ の場合は, σ^2 の Sprague-Grundy 系は $\mathscr{C}_{[1]}$ のみであり, 極小系も $\mathscr{C}_{[1]}$ のみである.

なおよく知られているように, 一般には

$$\mathrm{ord}_2\left(\sum_{i\in\Omega} c^i\right) \geqslant \mathrm{mord}_2(C)$$

であるため, σ^2 の最大系は上式において等号が成立するもの全体になっている.

4　混合基数法ニム

本節では, σ^2 を混合 β 進法に一般化した関数 σ^β に対して, その正の Sprague-Grundy 系を考える (詳細は [9] を参照).

4.1　既知のニムの一般化

2 以上の整数 b に対して Flanigan [5] は Sprague-Grundy 関数が次の石とりゲームを構成した:

$$\sigma^b(X) = x^0 \oplus_b \cdots \oplus_b x^{m-1}.$$

ただし, $\oplus_b$ は b 進法での繰り上がりのない足し算を表す. 前節までの言葉を使うと, Flanigan は σ^b の正の Sprague-Grundy 系を与えた. また Fraenkel と Lorberbom[6] は Sprague-Grundy 関数が次の石とりゲームを構成している:

$$\sigma^{[b]}(X) = b\left(\left\lfloor\frac{x^0}{b}\right\rfloor \oplus_2 \cdots \oplus_2 \left\lfloor\frac{x^{m-1}}{b}\right\rfloor\right) + ((x^0 + \cdots + x^{m-1}) \bmod b).$$

ここで $n \bmod b$ は n を b で割った余りである. 彼らはさらに, $\sigma^{[b]}$ の正の Sprague-Grundy 系の中で最小のものを決定した.

4.2　混合基数法でのニム和

以下での目標は, Sprague-Grundy 関数が次の石とりゲームを構成することである:

$$\sigma^\beta(X) = x^0 \oplus_\beta \cdots \oplus_\beta x^{m-1}.$$

ただし $\oplus_\beta$ は, すぐ下で定義するように, 混合 β 進法での繰り上がりのない足し算を表す. 我々は σ^β の正の Sprague-Grundy 系を与える (この σ^β は上の σ^b と $\sigma^{[b]}$ の一般化になっている). さらに σ^β の正の Sprague-Grundy 系の中で極小となるものの特徴付け (定理 4.4) と, 最大となるものの再帰的構成 (定理 4.7) を与える.

それでは σ^β を定義しよう．β を数列 $(\beta_L)_{L\in\mathbb{N}} \in \mathbb{N}^\mathbb{N}$ で各 $L \in \mathbb{N}$ に対して β_L が 2 以上のものとする．$\beta^L = \beta_0 \cdot \beta_1 \cdots \beta_{L-1}$ とおく．非負整数 $n \in \mathbb{N}$ に対して n_L^β で混合基底 β で n を展開した L 桁目を表す．すなわち，$n_{\geqslant L}^\beta$ を n を β^L で割った商とすると，n_L^β は $n_{\geqslant L}^\beta$ を β_L で割った余り $n_{\geqslant L}^\beta \bmod \beta_L$ である．このとき

$$n = \sum_{L\in\mathbb{N}} n_L^\beta \beta^L.$$

以下，誤解のないときは n_L^β の代わりに単に n_L と書く．また上式の右辺を $[n_0, n_1, \ldots]^\beta$ (あるいは単に $[n_0, n_1, \ldots]$) で表す．$n, h \in \mathbb{N}$ に対して $n \oplus_\beta h$ を β 進法で繰り上がりのない足し算を表す．すなわち

$$n \oplus_\beta h = \sum_{L\in\mathbb{N}} ((n_L + h_L) \bmod \beta_L)\beta^L.$$

また $X \in \mathbb{N}^m$ に対して次を定義する:

$$\sigma^\beta(X) = \sigma^{\beta,m}(X) = x^0 \oplus_\beta \cdots \oplus_\beta x^{m-1}.$$

例 4.1. $\beta = (60, 24, 7, \ldots)$ として $X = (1000, 2000)$ としよう．このとき

$$x^0 = [40, 16, 0], \quad x^1 = [20, 9, 1].$$

よって

$$\sigma^\beta(X) = [(40+20) \bmod 60, (16+9) \bmod 24, (0+1) \bmod 7] = [0, 1, 1] = 1500.$$

注 4.2. 2 以上の整数 b に対して $\beta = (b, b, \ldots)$ のとき σ^β は 1 節で見た σ^b，また $\beta = (b, 2, 2, \ldots)$ のとき $\sigma^{[b]}$ と一致する．

それでは σ^β の Sprague-Grundy 系を与えよう．非負整数 n に対して，次を定義する:

$$\mathrm{ord}_\beta(n) = \begin{cases} \max \{ L \in \mathbb{N} : \beta^L \mid n \} & \text{if } n \neq 0, \\ \infty & \text{if } n = 0. \end{cases}$$

すなわち，$\mathrm{ord}_\beta(n)$ は β^L が n を割り切る最大の L である．次の集合を考えよう．

$$\mathscr{C}^\beta = \left\{ C \in \mathbb{N}^m \setminus \{ (0, \ldots, 0) \} : \mathrm{ord}_\beta\left(\sum_{i\in\Omega} c^i\right) = \mathrm{mord}_\beta(C) \right\}.$$

ただし, $\mathrm{mord}_\beta(C) = \min\{\,\mathrm{ord}_\beta(c^i) : i \in \Omega\,\}$. 一般には

$$\mathrm{ord}_\beta\left(\sum_{i\in\Omega} c^i\right) \geqslant \mathrm{mord}_\beta(C)$$

のため, $\mathscr{C}^\beta$ はこの不等式において等号が成立するもの全体がなす集合である. $\mathscr{C}^\beta$ は注 3.1 の (SG1) をみたすことがすぐにわかる [*3]. さらに (SG2) をみたすことも示せるため, 次が成立する.

定理 4.3. $\mathscr{C}^\beta$ は σ^β の正の Sprague-Grundy 系である.

4.3 極小系

本節ではいくつかの言葉を準備した後, 正の極小系の特徴付けを与える.

まず局面の制限を導入する. $X \in \mathbb{N}^m$ とする. Ω の部分集合 S に対して

$$X|_S = (x^{s_0}, \ldots, x^{s_{k-1}})$$

と定義する. ただし $S = \{\,s_0, \ldots, s_{k-1}\,\}$ で $s_0 < \cdots < s_{k-1}$ である. なお $S = \varnothing$ のときは $X|_S$ は 0-tuple () とする. また $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{N}^m$ に対してその制限を次で定義する:

$$\mathscr{C}|_S = \Bigl\{C|_S : C \in \mathscr{C},\ C|_{\Omega\setminus S} = (\underbrace{0, \ldots, 0}_{|\Omega\setminus S|\ 個})\Bigr\}.$$

例えば $\mathscr{C} = \{\,(3,0,0), (0,3,2), (1,0,2)\,\}$ のとき $\mathscr{C}|_{\{\,0,2\,\}}$ は $\{\,(3,0), (1,2)\,\}$ になる.

次に重みを定義しよう. まず空でない $\mathbb{N}^m$ の部分集合 $\mathscr{C}$ に対して, その **重み** $\mathrm{wt}(\mathscr{C})$ を $\mathscr{C}$ に含まれる元の最大 Hamming 重みとして定義する. すなわち

$$\mathrm{wt}(\mathscr{C}) = \max\{\,\mathrm{wt}(C) : C \in \mathscr{C}\,\}.$$

また, 関数 $\sigma^{\beta,m}$ の **重み** $\mathrm{wt}(\sigma^{\beta,m})$ を $\sigma^{\beta,m}$ の Sprague-Grundy 系の最小重みとして定義する. すなわち,

$$\mathrm{wt}(\sigma^{\beta,m}) = \min_{\mathscr{C}\in\Delta(\sigma^{\beta,m})} \mathrm{wt}(\mathscr{C}).$$

例えば $\sigma^{2,m}$ の重みは, $\mathscr{C}_{[1]}$ が Sprague-Grundy 系であることから 1 である.

次の結果は, 正の極小系かどうかは局所的な性質であることを示している.

---

*3 実際 $C \in \mathscr{C}^\beta$ として, $M = \mathrm{mord}_\beta(C)$ としよう. このとき任意の $X \in \mathbb{N}^m$ に対して $\sigma^\beta_M(X+C) \neq \sigma^\beta_M(X)$ が示せる. また逆に $\sigma^\beta_M(X+C) \neq \sigma^\beta_M(X)$ ならば $C \in \mathscr{C}^\beta$ である.

定理 4.4. (1) $\mathrm{wt}(\sigma^{\beta,m}) = \min\{\, m,\ \sup\{\, \beta_L - 1 : L \in \mathbb{N} \,\}\,\}$. ただし, $\sup P$ は $\mathbb{N} \cup \{\,\infty\,\}$ での P の上限である.

(2) $w = \mathrm{wt}(\sigma^{\beta,m})$ として $\mathscr{C} \subseteq \mathbb{N}^m$ とする. このとき次は同値である:

(a) $\mathscr{C}$ は $\sigma^{\beta,m}$ の正の極小系である.

(b) 任意の空でない $S \subseteq \Omega$ に対して, $\mathscr{C}|_S$ は $\sigma^{\beta,|S|}$ の正の極小系である.

(c) $\mathscr{C}$ の重みは w であり, かつ, 任意の Ω の w 点集合 S に対して, $\mathscr{C}|_S$ は $\sigma^{\beta,w}$ の正の極小系である.

なお, 一般には正の極小系は唯一ではないが, 次がいえる.

定理 4.5. m を 2 以上とする. 関数 σ^β が唯一の正の極小系を持つ必要十分条件は, $\beta = (\beta_0, 2, 2, \ldots)$, すなわち $L \geqslant 1$ に対して $\beta_L = 2$ であることである.

4.4 最大系

関数 σ^β の最大の正 Sprague-Grundy 系を $\mathscr{A}^\beta$ で表そう. このとき $\mathscr{A}^\beta$ は (SG1) をみたす最大の集合であるため

$$\mathscr{A}^\beta = \{\, C \in \mathbb{N}^m : \text{全ての } X \in \mathbb{N}^m \text{ に対して } \sigma^\beta(X + C) \neq \sigma^\beta(X) \,\}.$$

実は $\beta = (b, 2, 2, \ldots)$ の場合は $\mathscr{A}^\beta = \mathscr{C}^\beta$ である. さらに逆に $\mathscr{A}^\beta = \mathscr{C}^\beta$ なら $\beta = (b, 2, 2, \ldots)$ であることも示せる. 本節の目的は一般の β に対して, $\mathscr{A}^\beta$ の再帰的構成を与えることである. まずは $\beta \neq (b, 2, 2, \ldots)$ の場合に何が起こっているか, 例を見てみよう.

例 4.6. $\beta = (3, 3, 3, \ldots)$ とする. $C = (2, 10) = ([2], [1, 0, 1])$ と $F = (2, 4) = ([2], [1, 1])$ を考えよう. このとき C と F はともに $\mathscr{C}^\beta$ には入らない. F は $\mathscr{A}^\beta$ にも入らないが, C は $\mathscr{A}^\beta$ に入る (すなわち, $\mathscr{A}^\beta$ は $\mathscr{C}^\beta$ よりも真に大きい). 実際 $F \notin \mathscr{A}^\beta$ であることは

$$\sigma^\beta((1, 2) + F) = \sigma^\beta(3, 6) = 0 = \sigma^\beta(1, 2)$$

から従う. 次に, 全ての $X \in \mathbb{N}^2$ に対して

$$\sigma_1^\beta(X + C) \neq \sigma_1^\beta(X) \quad \text{または} \quad \sigma_2^\beta(X + C) \neq \sigma_2^\beta(X)$$

が成立することを示そう. $\sigma_1^\beta(X + C) = \sigma_1^\beta(X)$ としてよい. このとき $x^i + c^i$ において 0 桁目から 1 桁目に繰り上がりはない. 実際, 繰り上がりがあるとすると

$(x^i+c^i)_1 = x^i \oplus_3 1$ となり, $\sigma_1^\beta(X+C) = (x^0+c^0)_1 \oplus_3 (x^1+c^1)_1 \neq \sigma_1^\beta(X)$ となってしまう．よって 0 桁目から 1 桁目に繰り上がりはない．このことから x^i+c^i において 1 桁目から 2 桁目にも繰り上がりがないことが従う．よって

$$\begin{aligned}\sigma_2^\beta(X+C) &= (x^0+c^0)_2 \oplus_3 (x^1+c^1)_2\\ &= x_2^0 \oplus_3 c_2^0 \oplus_3 x_2^1 \oplus_3 c_2^1\\ &= \sigma_2^\beta(X) \oplus_3 1 \neq \sigma_2^\beta(X).\end{aligned}$$

ゆえに, 全ての $X \in \mathbb{N}^2$ に対して $\sigma^\beta(X+C) \neq \sigma^\beta(X)$ のため, C は最大の正 Sprague-Grundy 系 $\mathscr{A}^\beta$ に入る [*4]. 本節の最後に $\mathscr{A}^\beta$ の元かどうかを判定する方法を与える.

それでは最大の正 Sprague-Grundy 系 $\mathscr{A}^\beta$ の再帰的構成を与えよう．$\mathscr{F}^\beta$ で $\mathbb{N}^m \backslash \mathscr{A}^\beta$ を表す．このとき

$$\mathscr{F}^\beta = \{\, C \in \mathbb{N}^m : \text{ある } X \in \mathbb{N}^m \text{ に対して } \sigma^\beta(X+C) = \sigma^\beta(X) \,\}.$$

$\widehat{\beta} = \beta_{\geqslant 1} = (\beta_1, \beta_2, \ldots)$ として, 非負整数 n と $F \in \mathbb{N}^m$ に対して, 次を定める:

$$\widehat{n} = n_{\geqslant 1} = [n_1, n_2 \ldots] \in \mathbb{N}, \qquad \widehat{F} = (\widehat{f^0}, \ldots, \widehat{f^{m-1}}) \in \mathbb{N}^m.$$

また

$$\rho(F) = \{\, r \in \{\,0,1\,\}^m : \text{全ての } i \in \Omega \text{ に対して } r^i \leqslant f_0^i \,\} \tag{4.1}$$

としよう．例えば $\beta = (4,4,\ldots)$ で $F = ([3], [0,2]) \in \mathbb{N}^2$ のとき $\rho(F) = \{\,0,1\,\} \times \{\,0\,\} = \{\,(0,0),(1,0)\,\}$ である [*5]. 非負整数 L に対して次を定義しよう:

$$\mathscr{F}_L^\beta = \left\{\, F \in \mathbb{N}^m : \sigma_0^\beta(F) = 0 \;\text{ かつ }\; \text{ある } r \in \rho(F) \text{ が存在して } \widehat{F} + r \in \mathscr{F}_{L-1}^{\widehat{\beta}} \,\right\}$$

ただし $\mathscr{F}_{-1}^{\widehat{\beta}} = \{\,(0,\ldots,0)\,\}$ である．例えば $m=2$ かつ $\beta = (3,3,\ldots)$ のとき

$$\mathscr{F}_0^\beta = \{\,(0,0),(1,2),(2,1)\,\}.$$

[*4] 上で述べたように $\beta = (b,2,2,\ldots)$ の場合 (例えば 2 進法の場合) は, $\mathscr{A}^\beta = \mathscr{C}^\beta$ である．よって $C \notin \mathscr{C}^\beta$ なら $C \notin \mathscr{A}^\beta$ のため, $\sigma^\beta(X+C) = \sigma^\beta(X)$ をみたす X が存在する.

[*5] $\rho(F)$ は次のように繰り上がりと関係がある．$f_0^i \neq 0$ としよう．このとき $f^i + \beta_0 - 1$ は 0 桁目から 1 桁目に繰り上がりが起こる．一方 $f_0^i = 0$ のときは, 0 桁目から 1 桁目に繰り上がりが起こることはない.

また $F = ([2], [1,1]) \in \mathbb{N}^2$ とすると $F \in \mathscr{F}_1^{\beta}$ である．実際, $\rho(F) = \{0,1\}^2 \ni (1,1)$ かつ

$$\widehat{F} + (1,1) = (0,1) + (1,1) = (1,2) \in \mathscr{F}_0^{\beta} = \mathscr{F}_0^{\widehat{\beta}}.$$

さらに $\sigma_0^{\beta}(F) = 2 \oplus_3 1 = 0$ のため, $F \in \mathscr{F}_1^{\beta}$ が分かる．

定理 4.7. 非負整数 L に対して

$$\left\{ F \in \mathscr{F}^{\beta} : \max F \leqslant \beta^{L+1} - \beta^{L} \right\} \subseteq \mathscr{F}_L^{\beta} \subseteq \mathscr{F}^{\beta}. \tag{4.2}$$

特に次が成立する．

(1) $\mathscr{F}^{\beta} = \bigcup_{L \in \mathbb{N}} \mathscr{F}_L^{\beta}$.

(2) $F \in \mathscr{F}^{\beta}$ となる必要十分条件は $\sigma_0^{\beta}(F) = 0$ かつある $r \in \rho(F)$ に対して $\widehat{F} + r \in \mathscr{F}^{\widehat{\beta}}$.

(3) $\mathscr{A}^{\beta} = \left\{ C \in \mathbb{N}^m : \text{ある } L \in \mathbb{N} \text{ が存在し } \max C \leqslant \beta^{L+1} - \beta^{L} \text{ かつ } C \notin \mathscr{F}_L^{\beta} \right\}$.

定理 4.7 の (2) を使って $F \in \mathscr{F}^{\beta}$ かどうかを判定できる．例を挙げる．

例 4.8. 例 4.6 を再び考えよう．$\beta = (3, 3, \ldots,)$, $C = (2, 10)$ として, $C \in \mathscr{A}^{\beta}$ であることを定理 4.7 を使って確認する．すなわち, 全ての $r \in \rho(C)$ に対して $\widehat{C} + r \notin \mathscr{F}^{\widehat{\beta}}$ を示す． ここで $\widehat{C} + r \in \mathscr{F}^{\widehat{\beta}}$ ならば $\sigma_0^{\widehat{\beta}}(\widehat{C} + r) = 0$ であることに注意しよう．$\rho(C) = \{0,1\}^2$ のため, $r \in \rho(C)$ が $\sigma_0^{\widehat{\beta}}(\widehat{C} + r) = 0$ を満たすならば, $r = (0,0)$ である．さらに $\widehat{C} = ([0], [0,1])$ かつ $\rho(\widehat{C}) = \{0\}^2$ のため $\widehat{C} \notin \mathscr{F}^{\widehat{\beta}}$ である．よって $C \notin \mathscr{F}^{\beta}$ のため, $C \in \mathscr{A}^{\beta}$ である．

参考文献

[1] E. R. Berlekamp, J. H. Conway, and R. K. Guy. *Winning Ways for Your Mathematical Plays.* A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

[2] U. Blass, A. S. Fraenkel, and R. Guelman. How Far Can Nim in Disguise Be Stretched? *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 84(2):145–156, 1998.

[3] C. L. Bouton. Nim, a game with a complete mathematical theory. *The Annals of Mathematics*, 3(1/4):35–39, 1901.

[4] J. H. Conway. *On Numbers and Games.* A.K. Peters, Natick, Mass., 2nd edition, 2001.

[5] J. A. Flanigan. Nim, Trim and Rim. unpublished document, Mathematics Department, University of California, Los Angeles, 1980.

[6] A. S. Fraenkel and M. Lorberbom. Nimhoff games. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 58(1):1–25, 1991.

[7] P. M. Grundy. Mathematics and games. *Eureka*, 2:6–8, 1939.

[8] Y. Irie. p-Saturations of Welter's game and the irreducible representations of symmetric groups. *Journal of Algebraic Combinatorics*, 48:247–287, 2018.

[9] Y. Irie. Mixed-Radix Nim. *arXiv:1801.00616*, 2018.

[10] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). Maya game について. 数学のあゆみ, 15(1):73–84, 1970.

[11] 佐藤幹夫 (榎本彦衛 記). マヤ・ゲームの数学的理論. 数理解析研究所講究録, 98:105–135, 1970.

[12] 佐藤幹夫 (上野健爾 記). あるゲームについて. 第 12 回代数分科会シンポジューム報告集, 123–136, 1968.

[13] R. P. Sprague. Über mathematische Kampfspiele. *Tohoku Mathematical Journal, First Series*, 41:438–444, 1935.

[14] C. P. Welter. The Theory of a Class of Games on a Sequence of Squares, in Terms of the Advancing Operation in a Special Group. *Indagationes Mathematicae (Proceedings)*, 57:194–200, 1954.